正直なオークションにおける談合の影響 (理論計算機科学の深化 : 新たな計算世界観を求めて)

AUTHOR(S):

市場, 孝之; 岩間, 一雄

CITATION:

市場, 孝之 ...[et al]. 正直なオークションにおける談合の影響 (理論計算機科学の深化 : 新たな計算世界観を求めて). 数理解析研究所講究録 2008, 1599: 189-194

ISSUE DATE:

2008-05

数理解析研究所講究録
第 1599 巻 2008 年 189-194

正直なオークションにおける談合の影響

京都大学大学院情報学研究科　市場 孝之, 岩間 一雄
Graduate School of Informatics, Kyoto University

概要

本研究ではデジタル商品のように無限に複製可能な商品を扱うオークションを扱う．入札者が支払える最大額を正直に入札をする仕組みを持つオークションを正直なオークションと呼ぶ．本研究では特に入札者の談合について議論しており，談合者も正直な入札をするような仕組みを持つオークションについて考察する．更にこのようなオークションにおける競合比を提案し，競合比が $4\log m$ であるアルゴリズムを構築する．また競合比を $\frac{1}{2}\ln m$ より改善できないことを証明する．

1　定義

1.1　オークション

定義 1.1 オークション $\mathcal{A}$ は以下のように定義される．

1. オークションは 1 種類の商品を扱う．n 人の入札者はそれぞれ独立に商品に対して払ってもよいと考える価格を一度だけ入札する．入札額は正数の列 $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ で表される．
2. 競売人は入札 $\mathbf{b}$ を元に提示額 $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n)$ を計算する．入札者 i は，$t_i \leq b_i$ であれば価格 t_i で商品を落札し，$b_i < t_i$ であれば商品を落札できない．このとき落札額 $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ は，それぞれ $p_i = t_i$, $p_i = 0$ である．
3. 競売人の利益は総売り上げ，すなわち落札価格の合計である．これを $\mathcal{A}(\mathbf{b}) = \sum_i p_i$ と書く．

提示額 $\mathbf{t}$ が，入札 $\mathbf{b}$ の関数として一意に定まるとき，オークションは決定性であるという．他方，$\mathbf{t}$ が確率的に定められる (確率変数である) とき，オークションは確率性であるという．

オークションの入札者はそれぞれ独立に効用価格 $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ を持つ．効用価格とは，入札者が商品に対して本当に払ってもいいと思っている最大の価格である．入札者 i の利益は，商品を落札した場合効用価格と落札価格の差 $u_i - p_i$ であり，落札できなかった場合は 0 である．入札者の目的は利益を最大化することである．

1.2　Truthfulness

定義 1.2 オークションにおいて，それぞれの入札者 i が他の入札者の入札額に関係なく効用価格を入札する ($b_i = u_i$) ことで自身の利益 (の期待値) を最大化できるという性質を，**truthful** という．

定義 1.3 提示額が関数 $f : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ で次のように表されるオークションを，**bid-independent** オークションという．
任意の i について $t_i = f(\mathbf{b}_{-i})$，ただし，$\mathbf{b}_{-i} = (b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n)$.

入札者が談合していないという前提のもとでは，次の定理が成り立つ．

定理 1.4 [2] オークションが bid-independent であるとき，またそのときに限って truthful である．

1.3 競合比

定義 1.5 単一価格全知のオークション $\mathcal{F}^{(m)}$ は次のようなアルゴリズムを持つ．入札 $\mathbf{b}$ の内 i 番目に大きい入札を v_i とする．オークション $\mathcal{F}^{(m)}$ は入札 $\mathbf{b}$ に対し，$k^* = \mathrm{argmax}_{k \geq m}\{k \cdot v_k\}$ を計算し，全員に v_{k^*} を提示する．

オークション $\mathcal{F}^{(m)}$ の利益は

$$\mathcal{F}^{(m)}(\mathbf{b}) = k^* \cdot v_{k^*} = \max_{k \geq m} k \cdot v_k$$

となる．また，$\mathcal{F}^{(m)}$ は bid-independent ではない．

定義 1.6 Bid-independent オークション $\mathcal{A}$ の競合比が $\beta > 0$ であるとは，任意の入札 $\mathbf{b}$ に対し次の式が成り立つことをいう．

$$E[\mathcal{A}(\mathbf{b})] \geq \frac{\mathcal{F}^{(2)}(\mathbf{b})}{\beta}$$

定理 1.7 [2] 任意の bid-independent オークションの競合比の下界は 2.42 である．

競合比が 4 である SCS アルゴリズム [2]，3.39 である CORE アルゴリズム [1] が設計されている．

2 談合

談合とは，複数の入札者が情報を交換し，お互いが有利になるような入札をすることである．本研究では談合者の性質を以下のように定義している．

- 談合者のグループは 1 つのみで，入札者全体の部分集合である．談合者を $\mathbf{M} = \{1, ..., m\} \subset \mathbf{N}$ で表す $(2 \leq m \leq n-1)$．
- 談合の利益は談合している入札者の利益の合計である．
- 談合者は談合の利益を最大化するよう入札 $\mathbf{b}_M = \{b_1, ..., b_m\}$ を決定する．

以下では，オークションは談合者の入札 $\mathbf{b}_M$ とそれ以外の入札 $\mathbf{b} \setminus \mathbf{b}_M$ を区別することができるとする．

定義 2.1 提示額が関数 $f_M : \mathbb{R}^{n-m} \mapsto \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ で次のように表されるオークションを，***m*-bid-independent** であるという．

- $t_i \leftarrow f_M(\mathbf{b}_{-M})$ (if $i \in \mathbf{M}$)
- $t_i \leftarrow f(\mathbf{b}_{-i})$ (otherwise)

ただし，$\mathbf{b}_{-M} := \mathbf{b} \setminus \mathbf{b}_M = (b_{m+1}, ..., b_n)$ とする．

定理 2.2 m-bid-independent オークションは，m 人が談合していても truthful である．

定理 2.3 提示価格 t_i の確率密度関数 $\pi_i(t)$ が定義できかつ連続である確率性オークションは，オークション

m-bid-independent であるときに限って truthful である．

2.1 m-bid-independent オークションの競合比

m-bid-independent オークションを以前の競合比で評価すると，常に競合比は発散してしまう．本節では m-independent オークションに対して新しく適当な競合比を提案する．

定義 2.4 m-bid-independent オークション $\mathcal{A}$ の競合比が $\beta > 0$ であるとは，任意の入札 $\mathbf{b}$ に対し次の式が成り立つことをいう．

$$E[\mathcal{A}(\mathbf{b})] \geq \frac{\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{b})}{\beta}$$

3 m-bid-independent オークションの競合比の上界

本節では競合比が $4\log m$ である Randomized m-bid-independent アルゴリズムを設計する．

■アルゴリズム　入札を談合者，非談合者ごとに大きい順にソートし，それぞれ $(b_1,...,b_m),(b_{m+1},...,b_n)$ とする．$\{1,...,m\}$ からランダムに選んだ値を S, $\{2^{-1},2^{-2},...,2^{-\log m}\}$ からランダムに選んで R とする．また，$x=b_S$, $y=b_{m+1}$ とする．オークションは談合者に対して，Ry を提示する．また非談合者に対しては，確率 $\frac{1}{2}$ で SCS[2] を実行し，確率 $\frac{1}{2}$ で mx を提示する．

■競合比　入札 $(b_1,...,b_m),(b_{m+1},...,b_n)$ に対し $\mathcal{F}^{(m+1)}$ を実行した場合，談合者，非談合者の勝者がそれぞれ k 人，ℓ人で $(k+\ell \geq m+1)$，その落札額が p であったとする．オークションの利益は $\mathcal{F}^{(m+1)} = (k+\ell)p$ である．

次に提案するアルゴリズムの利益を考える．SCS は S の値によらず確率 1/2 で実行される．その利益は入札が $(b_{m+1},...,b_n)$ の談合のないオークションに SCS を実行した場合と同じである．SCS の (談合のない入札に対する) 競合比は 4 であるから，

$$E[SCS] \geq \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\mathcal{F}^{(2)}(b_{m+1},...,b_n).$$

また，$\ell \geq 2$ であれば $\mathcal{F}^{(2)}(b_{m+1},...,b_n) \geq \ell p$ であるから，

$$E[SCS] \geq \tfrac{1}{8}(\ell-1)p.$$

次に SCS 以外の部分で得られる利益 (SMP とする) を計算する．$S \leq k$ のとき (確率 k/m), $x \geq p$, $E[s|s\leq k]=(k+1)/2$ である．$c=\frac{x}{y}$ とおく．$c \geq \frac{1}{2}$ のとき，確率 $1/\log m$ で少なくとも S 人が価格 $y/2$ で落札する．したがって

$$E[SMP] \geq \frac{1}{\log m}\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{y}{2} \geq \frac{kp}{4\log m}.$$

$\frac{1}{2^i} \leq c < \frac{1}{2^{i-1}}$ のとき，確率 $1/\log m$ で少なくとも S 人が価格 $y/2^i$ で落札する．したがって，

$$E[SMP] \geq \frac{1}{\log m}\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{y}{2^i} > \frac{kp}{4\log m}.$$

$c < \frac{1}{2^{\log m}}$ のとき，$mx < y$ であるから，確率 1/2 で非談合者の第一入札者が mx で落札できる．したがって

$$E[SMP] \geq \frac{1}{2}mx \geq \frac{mp}{2}.$$

以上よりアルゴリズムの利益 $\mathcal{ALG} = SCS + SMP$ は,

$$E[\mathcal{ALG}] \geq \frac{1}{8}(\ell - 1)p + \frac{k}{m}\min(\frac{kp}{4\log m}, \frac{mp}{2}).$$

となる．ここで $k + \ell \geq m+1, k \leq m$ に注意すれば，比 $E[\mathcal{F}^{(m+1)}]/E[\mathcal{ALG}]$ は $k = m, \ell = 1$ で最大で $\frac{m+1}{m/4\log m}$. したがって.

$$E[\mathcal{ALG}] \geq E[\mathcal{F}^{(m+1)}]/4\log m.$$

4 m-bid-independent オークションの競合比の下界

m-bid-independent オークションの競合比の下界が β であることを示すには，任意の m-bid-independent auction $\mathcal{A}$ に対してある入札 $\mathbf{b}$ が存在して，

$$E[\mathcal{A}(\mathbf{b})] \leq \frac{\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{b})}{\beta}$$

が成り立つことを示せばよい.

定理 4.1 任意の m-truthful auction の競合比の下界は次式で与えられる．

$$\frac{m+1}{m+k}(1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}), \ {}^{\forall}k \geq 1.$$

証明．確率的手法を用いる．入札ベクトル $\mathbf{B}$ の確率空間 $\mathbb{B}$ を定義し，次を示す.

$${}^{\forall}k \geq 1,\ E_{\mathbb{B}}[E_{\mathcal{A}}[\mathcal{A}(\mathbf{B})]] \geq m + k,$$

$$E_{\mathbb{B}}[\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B})] \leq (m+1)(1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}).$$

次のような，m 人の談合者と k 人の非談合者からなる入札を考える．

$\mathbf{B} := ((B_0, ..., B_0), B_1, ..., B_k).$
ただし $B_0, ..., B_k$は独立で，$Pr[B_i \geq z] = \frac{1}{z}$ $(z > 1)$ を満たす確率変数.

任意の m-bid-independent オークション $\mathcal{A}(\mathbf{B})$ において，談合者への提示額，落札価格をそれぞれ T, P とすると次の式が得られる．

$$E[P|T = t] = t \cdot Pr[B_0 \geq t|T = t].$$

オークションは m-bid-independent であるから，T と B_0 は独立である．したがって,

$$E[P|T = t] = t \cdot Pr[B_0 \geq t] \leq t \cdot \frac{1}{t} = 1.$$

すなわち T の値によらず $E[P] \leq 1$ が成り立つ．同様にして，k 人の非談合者の落札価格 P_i $(i = 1, ..., k)$ について，$E[P_i] \leq 1$ が成り立つので,

$$E[\mathcal{A}(\mathbf{B})] = m \cdot E[P] + \sum_{i=1}^{k} E[P_i] \leq m + k.$$

次に単一価格全知のオークション $\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B})$ の利益を求める．$\mathbf{B}$ に対して次のような入札 $\mathbf{B}'$ を考える．

$$\mathbf{B}' := ((B_0, ..., B_0), \hat{B}), \quad \text{ただし}\ \hat{B} := \max(B_1, ..., B_k).$$

明らかに $\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B}) \geq \mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B}')$ である．ここで $\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B}')$ の期待値を考えると，

$$E[\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B}')] = (m+1) \cdot \min(B_0, \hat{B}).$$

である．$E[X] = \int_0^\infty Pr[X > z]dz$ であるから，まず $P(z) = Pr[\min(B_0, \hat{B}) > z]$ を求める．

$$\begin{aligned} P(z) &= Pr[B_0 > z] \cdot Pr[\hat{B} > z] \\ &= Pr[B_0 > z] \cdot \Big(1 - Pr[B_1 < z] \cdots Pr[B_k < z]\Big) \\ &= \begin{cases} 1 & (z < 1) \\ \frac{1}{z}\Big(1 - (1 - \frac{1}{z})^k\Big) & (z \geq 1) \end{cases}. \end{aligned}$$

二項定理より，

$$\frac{1}{z}(1 - (1 - \tfrac{1}{z})^k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{-1}{z}\right)^{i+1}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} E[\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B}')] &= (m+1) \int_0^\infty P(z)dz \\ &= (m+1)\left\{ \int_0^1 dz + \int_1^\infty \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{-1}{z}\right)^{i+1} dz \right\} \\ &= (m+1)\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right), \\ E[\mathcal{F}^{(m+1)}(\mathbf{B})] &\geq (m+1)\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right). \end{aligned}$$

□

■**漸近値**　定理 4.1 で与えられる競合比の下界の漸近値を考える．調和級数の極限は，

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma, \quad (\text{ただし}\ \gamma = 0.5772...).$$

で表される．したがって，定理 4.1 において $k = m$ とおけば，その漸近値は次のようになる．

$$\frac{m+1}{2m}(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}) \approx \frac{1}{2} \ln m + 0.7886.$$

5　おわりに

無限に複製可能な商品を扱うオークションにおいて，談合による影響を受けないようなオークションとして m-bid-independent オークションを提案した．また，bid-independent オークションにおける競合比と同様に，m-bid-independent オークションの競合比を提案し，競合比が $4 \log m$ であるアルゴリズムを設計した．また，競合比の下界が $\frac{1}{2} \ln m + 0.7886$ であることを証明した．

参考文献

[1] Andrew V. Goldberg and Jason D. Hartline. Competitiveness via consensus. In *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 215–222, 2003.

[2] Andrew V. Goldberg, Jason D. Hartline, Anna R. Karlin and A. Wright. Competitive auctions. Microsoft Research, 1065 La Avenida, Mountain View, CA 94043, 2002.

[3] Andrew V. Goldberg, Jason D. Hartline, Anna R. Karlin and Michael Saks. A lower bound on the competitive ratio of truthful auctions. In *The 21st International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 644–655, 2004.

[4] Kazuo Iwama, Daisuke Sumita. Truthful auctions with limited range of bids. 京都大学大学院情報学研究科通信情報システム専攻平成 *18* 年度修士論文, 2007.